Sur certains automorphismes des algèbres hilbertiennes

Par I. KOVÁCS à Szeged

Introduction

Soit $\mathbf{R}$ une algèbre hilbertienne[1]), c'est-à-dire une $*$-algèbre[2]) sur le corps des nombres complexes, munie d'un produit scalaire hermitien positif $(x|y)$, vérifiant les axiomes suivants:

(i) $(x|y)=(y^*|x^*)$ pour $x, y \in \mathbf{R}$.

(ii) $(xy|z)=(y|x^*z)$ pour $x, y, z \in \mathbf{R}$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $y \rightarrow yx$ est continue.

(iv) L'ensemble des éléments de la forme xy, où $x, y \in \mathbf{R}$, est partout dense dans $\mathbf{R}$.

Soit $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ l'espace hilbertien complété de $\mathbf{R}$. Les axiomes (i) et (iii) entraînent que les applications $y \rightarrow xy$, $y \rightarrow yx$ se prolongent de manière unique en opérateurs bornés U_x, V_x définis sur $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$. On a immédiatement:

$$U_{\lambda x+\mu y}=\lambda U_x+\mu U_y \quad U_{xy}=U_x U_y \quad (U_x)^*=U_{x^*}$$

$$V_{\lambda x+\mu y}=\lambda V_x+\mu V_y \quad V_{xy}=V_y V_x \quad (V_x)^*=V_{x^*}.$$

Désignons par $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$] l'$*$-algèbre des opérateurs U_x (resp. V_x). L'adhérence forte de $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$] est une algèbre de von Neumann qui sera désignée par $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$). On appelle $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) *l'algèbre de von Neumann associée à gauche* (resp. *à droite*) à $\mathbf{R}$. L'ensemble $(\mathbf{R}^g)'$ des opérateurs bornés définis sur $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ permutables aux éléments de $\mathbf{R}^g$ est identique à $\mathbf{R}^d$: $(\mathbf{R}^g)'=\mathbf{R}^d$. Par suite, $\mathbf{R}^g \cap \mathbf{R}^d$ est le centre commun de $\mathbf{R}^g$ et

---

[1]) Dans tout le travail, nous utiliserons la terminologie de [2]. Pour les propriétés élémentaires des algèbres hilbertiennes, cf. [2], chap. I, § 5.

[2]) On appelle *$*$-algèbre* sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ une algèbre associative $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{C}$, munie d'une application biunivoque $x \rightarrow x^*$ de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{A}$ telle que $(\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda}x^*+\bar{\mu}y^*$, $(xy)^*=y^*x^*$, $x^{**}=x$ $(x, y \in \mathbf{A}; \lambda, \mu \in \mathbf{C})$.

$\mathbf{R}^d$. Si $\mathbf{R}^g \cap \mathbf{R}^d$ se réduit aux opérateurs scalaires, c'est-à-dire si $\mathbf{R}^g$ et $\mathbf{R}^d$ sont des facteurs, $\mathbf{R}$ sera dite *irréductible*.

Un élément $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ est dit *borné à gauche* (resp. *à droite*) s'il existe un opérateur borné U_a (resp. V_a) défini sur $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ tel que $U_a x = V_x a$ (resp. $V_a x = U_x a$) pour $x \in \mathbf{R}$. (Les éléments de $\mathbf{R}$ sont bornés à gauche et à droite et les notations U_a, V_a sont cohérentes avec les notations U_x, V_x antérieures lorsque $x \in \mathbf{R}$.) L'ensemble $\mathbf{B}_g$ des éléments bornés à gauche est identique à l'ensemble $\mathbf{B}_d$ des éléments bornés à droite. Les éléments de l'ensemble $\mathbf{B} = \mathbf{B}_g = \mathbf{B}_d$ sont dits simplement *bornés*. Les U_a (resp. V_a), a borné, forment un idéal bilatère de $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$). On dit que $\mathbf{R}$ est *achevée* si tout élément borné de $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ appartient à $\mathbf{R}$.

Pour $S \in (\mathbf{R}^g)^+$ [3] [resp. $S \in (\mathbf{R}^d)^+$], posons:

$\varphi(S) = (a|a)$ si $S^{\frac{1}{2}} = U_a$ (resp. $S^{\frac{1}{2}} = V_a$) pour un $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ borné;
$\varphi(S) = +\infty$ dans le cas contraire.

Alors, φ est une trace[4] normale, fidèle et semi-finie sur $(\mathbf{R}^g)^+$ [resp. $(\mathbf{R}^d)^+$]. L'idéal bilatère des $T \in \mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) qui peuvent se mettre sous la forme U_a (resp. V_a) avec un a borné est identique à l'idéal bilatère des $T \in \mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) tels que $\varphi(T^* T) < +\infty$. Si a et b sont des éléments bornés, on a $\dot{\varphi}(U_b^* U_a) = (a|b)$ [resp. $\dot{\varphi}(V_b^* V_a) = (a|b)$] (cf. [2], chap. I, § 6, th. 1). On appelle φ la *trace naturelle* sur $(\mathbf{R}^g)^+$ [resp. $(\mathbf{R}^d)^+$].

Soit M un $*$-automorphisme[5] quelconque de $\mathbf{R}$. Par la relation $\Phi_M(U_x) = U_{Mx}$ [resp. $\Psi_M(V_x) = V_{Mx}$] $(x \in \mathbf{R})$, M définit un $*$-automorphisme Φ_M (resp. Ψ_M) de $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$], comme on le voit aisément. Nous convenons de dire qu'un $*$-automorphisme M de $\mathbf{R}$ est *induisant à gauche* (resp. *à droite*) si M „induit" un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$)

[3]) Pour un ensemble $\mathfrak{M}$ d'opérateurs bornés définis sur un espace hilbertien, $\mathfrak{M}^+$ désigne l'ensemble des éléments hermitiens $\geqq 0$ de $\mathfrak{M}$. On appelle $\mathfrak{M}^+$ la *partie positive* de $\mathfrak{M}$.

[4]) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann. On appelle *trace* sur $\mathcal{A}^+$ une fonction φ définie sur $\mathcal{A}^+$, à valeurs $\geqq 0$, telle que $\varphi(S+T) = \varphi(S) + \varphi(T)$, $\varphi(\lambda S) = \lambda\varphi(S)$, $\varphi(USU^{-1}) = \varphi(S)$ pour $S, T \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geqq 0$, et pour tout élément unitaire U de $\mathcal{A}$. On dit que *a*) φ est *fidèle* si les conditions $S \in \mathcal{A}^+$, $\varphi(S) = 0$ entraînent $S = 0$; *b*) φ est *normale* si, pour tout ensemble filtrant croissant $\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}^+$ de borne supérieure $S \in \mathcal{A}^+$, $\varphi(S)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathfrak{F})$; *c*) φ est semi-finie si, pour tout T non nul de $\mathcal{A}^+$, il existe un S non nul de $\mathcal{A}^+$ majoré par T tel que $\varphi(S) < +\infty$ (cf. [2], chap. I, § 6, déf. 1).

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann, φ une trace sur $\mathcal{A}^+$. L'ensemble des $T \in \mathcal{A}^+$ tels que $\varphi(T) < +\infty$ est la partie positive d'un idéal bilatère $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{A}$. Il existe une forme linéaire $\dot{\varphi}$ et une seule sur $\mathfrak{m}$ coincidant avec φ sur $\mathfrak{m}^+$ (cf. [2], chap. I, § 6, prop. 1).

[5]) Etant donné une $*$-algèbre $\mathbf{A}$, on appelle $*$-*automorphisme* de $\mathbf{A}$ tout automorphisme M de l'algèbre $\mathbf{A}$, vérifiant $(Mx)^* = Mx^*$ $(x \in \mathbf{A})$.

au sens suivant: Φ_M (resp. Ψ_M) peut être prolongé en un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) [6]).

Dans la première partie du présent travail, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne soit induisant à gauche (resp. à droite) (cf. **1.**, théorème). Il en résulte que pour qu'un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne soit induisant à gauche it faut et il suffit qu'il soit induisant à droite (cf. **1.**, théorème, corol. 1). On peut donc parler simplement d'*$*$-automorphismes induisants* (cf. **1.**, définition). Le corollaire 2 du théorème du paragraphe **1** fournit une déscription des $*$-automorphismes induisants d'une algèbre hilbertienne irréductible. Les recherches de la deuxième partie du travail, liées à celles de la première, se rapportent au cas d'une algèbre hilbertienne munie sur un groupe localement compact unimodulaire (cf. **2.**).

1.

Théorème. *Soient* $\mathbf{R}$ *une algèbre hilbertienne, M un $*$-automorphisme de* $\mathbf{R}$. *Pour que M soit induisant à gauche (resp. à droite) (cf. Introduction), il faut et il suffit que M et son inverse* M^{-1} *comme des opérateurs linéaires admettent des prolongements linéaires fermés dans* $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$.

Démonstration. Supposons que la condition du théorème soit remplie. Nous allons démontrer que Φ_M peut être prolongé en un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ (pour les notation, cf. Introduction). Désignons par $\overline{M}$ (resp. $\overline{M^{-1}}$) le plus petit prolongement linéaire fermé de M (resp. M^{-1}). $\overline{M}$ (resp. $\overline{M^{-1}}$) est identique à M^{**} [resp. $(M^{-1})^{**}$] [7]). L'existence de M^* et $(M^{-1})^*$ entraîne l'existence de $(M^*)^{-1}$, et on a $(M^*)^{-1}=(M^{-1})^*$. En appliquant ce raisonnement à l'opérateur M^*, on voit que $(M^{**})^{-1}$ existe et $(M^{**})^{-1}=((M^*)^{-1})^*$, d'où $(M^{**})^{-1}=(M^{-1})^{**}$, c'est-à-dire

$$\overline{M^{-1}}=\overline{M}^{-1}. \tag{1}$$

Soit maintenant x un élément quelconque de $\mathbf{R}$. Pour tout $y\in\mathbf{R}$, on a $MU_xy=M(U_xy)=M(xy)=MxMy=U_{Mx}My=\Phi_M(U_x)My$. Ceci veut dire

6) *L'* $*$-automorphisme Φ_M (resp. Ψ_M) définit uniquement son prolongement sur $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$). En effet, tout $*$-automorphisme d'une algèbre de von Neumann est continu dans la topologie ultraforte (cf. [2], chap. I, § 4, th. 2, corol. 1), et l' $*$-algèbre d'opérateurs $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$] est ultrafortement partout dense dans l'algèbre de von Neumann $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) (cf. [2], chap. I, § 3, th. 2).

7) Pour la théorie des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien, nous renvoyons le lecteur à [4].

que $\Phi_M(U_x)M \subseteq MU_x$, d'où $[\Phi_M(U_x)]^{**}M^{**} \subseteq M^{**}U_x^{**}$. Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

(2) $$\Phi_M(U_x)\overline{M} \subseteq \overline{M}U_x.$$

Par suite, $U_x\overline{M}^* \subseteq \overline{M}^*\Phi_M(U_x)$ $(x \in \mathbf{R})$. En multipliant à droite par $\overline{M}$, on obtient

(3) $$U_x\overline{M}^*\overline{M} \subseteq \overline{M}^*\Phi_M(U_x)\overline{M} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Soit a un élément quelconque de $\mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}}$. Alors, d'après (2), $U_xa \in \mathfrak{D}_{\overline{M}}$ et $\Phi_M(U_x)\overline{M}a = \overline{M}U_xa$ $(x \in \mathbf{R})$. D'après (3), $\Phi_M(U_x)\overline{M}a \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*}$ et $U_x\overline{M}^*\overline{M}a = \overline{M}^*\Phi_M(U_x)\overline{M}a$. Donc

(4) $$U_x\overline{M}^*\overline{M} \subseteq \overline{M}^*\overline{M}U_x$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$. On en déduit

(5) $$U_x|\overline{M}| \subseteq |\overline{M}|U_x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

où $|\overline{M}| = (\overline{M}^*\overline{M})^{\frac{1}{2}}$.

Prouvons maintenant que l'opérateur $|\overline{M}|$ admet un inverse, c'est-à-dire que les conditions $a \in \mathfrak{D}_{|\overline{M}|}$, $|\overline{M}|a = 0$ entraînent $a = 0$. Soit donc $a \in \mathfrak{D}_{|\overline{M}|}$ tel que $|\overline{M}|a = 0$. Alors, pour tout $b \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}} \subseteq \mathfrak{D}_{|\overline{M}|}$, on a $(|\overline{M}|a\,|\,|\overline{M}|b) = (a\,|\,|\overline{M}|^2b) = (a\,|\,\overline{M}^*\overline{M}b) = 0$. Pour prouver que $a = 0$, il suffit de prouver que les éléments $\overline{M}^*\overline{M}b$ $(b \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}})$ sont partout dense dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, ou ce qui revient au même, que l'opérateur $\overline{M}^*\overline{M}$ admet un inverse à dense domaine dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Comme l'inverse de l'opérateur autoadjoint $\overline{M}^*\overline{M}$, s'il existe, est autoadjoint, donc à dense domaine dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, il ne reste qu'à prouver l'existence de $(\overline{M}^*\overline{M})^{-1}$. Soit donc $b \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}}$ tel que $\overline{M}^*\overline{M}b = 0$. Alors, pour tout $c \in \mathfrak{D}_{\overline{M}}$, on a $(\overline{M}^*\overline{M}b|c) = (\overline{M}b|\overline{M}c) = 0$. Comme l'ensemble des éléments de la forme $\overline{M}c$ $(c \in \mathfrak{D}_{\overline{M}})$ est partout dense dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, $\overline{M}b = 0$, d'où $b = 0$ (cf. (1)), ce qui veut dire que l'inverse de $\overline{M}^*\overline{M}$ existe. Il en résulte l'existence de $|\overline{M}|^{-1}$. Tenant compte de (5), on a

(6) $$U_x|\overline{M}|^{-1} \subseteq |\overline{M}|^{-1}U_x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Considérons maintenant la décomposition polaire de $\overline{M}$, c'est-à-dire la décomposition $\overline{M} = U|\overline{M}|$, où U est un opérateur partiellement isométrique admettant pour sous-espace initial l'adhérence de $|\overline{M}|\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ et pour sous-espace final l'adhérence de $\overline{M}\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Comme les opérateurs $\overline{M}$ et $|\overline{M}|$ admettent des inverses à dense domaine dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, U est unitaire.

En multipliant maintenant (2) par $\overline{M}^{-1} = |\overline{M}|^{-1}U^{-1}$ à droite, nous obtenons, d'après (6),

$$\Phi_M(U_x) \subseteq \overline{M}U_x\overline{M}^{-1} = U|\overline{M}|U_x|\overline{M}|^{-1}U^{-1} = U|\overline{M}||\overline{M}|^{-1}U_xU^{-1} = UU_xU^{-1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\Phi_M(U_x) = UU_xU^{-1}$. En posant $\Phi(T) = UTU^{-1}$ pour tout $T \in \mathbf{R}^g$, on définit un $*$-automorphisme Φ de $\mathbf{R}^g$ prolongeant Φ_M, donc M est induisant à gauche.

En partant de la relation

$$MV_xy = M(yx) = MyMx = V_{Mx}My = \Psi_M(V_x)My \qquad (x, y \in \mathbf{R}),$$

on voit que $\Psi_M(V_x) = UV_xU^{-1}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi Ψ_M peut être prolongé en un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^d$, c'est-à-dire M est aussi induisant à droite, ce qui veut dire que la condition du théorème est suffisante.

Prouvons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons donc que M soit induisant à gauche[8]). Désignons par Φ l'$*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ prolongeant Φ_M.

Soit φ la trace naturelle sur $(\mathbf{R}^g)^+$. Posant $\varphi_1(T) = \varphi(\Phi(T))$ pour $T \in (\mathbf{R}^g)^+$, on obtient une trace normale fidèle et semi-finie φ_1 sur $(\mathbf{R}^g)^+$ (cf. note 4). Soit $\mathbf{R}_1$ une algèbre hilbertienne achevée partout dense dans $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{R}^g = \mathbf{R}_1^g$ et telle que φ_1 soit la trace naturelle correspondante (cf. [2], chap. I, § 6, lemme 1). Soient $\Omega\colon x \to U_x$, et $\Omega_1\colon y \to U'_y$ les applications canoniques de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}^g$. Alors, $\Omega_1^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \Omega$ est un isomorphisme de l'algèbre hilbertienne $\mathbf{R}$ sur l'algèbre hilbertienne $\mathbf{R}_1$ qui se prolonge en un opérateur unitaire W de $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$. Pour tout $T \in \mathbf{R}^g$, on a $\Phi(T) = W^{-1}TW$ (cf. [2], chap. I, § 6, th. 4). D'après la construction de W, on a $U'_{Wx} = \Phi^{-1}(U_x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Il en résulte que, pour $y \in \mathbf{R}_1$, $\Phi(U'_y) \in \mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)$.

$\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)$, muni du produit scalaire $(U'_{y_1} | U'_{y_2})_1 = \varphi_1(U'^*_{y_2} U'_{y_1})$, est un espace préhilbertien séparé dont nous désignerons le complété abstrait par $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$. Soit $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ telle que $\varphi_1(T) = \sum_{\iota \in I} (Ta_\iota | a_\iota)$ pour $T \in (\mathbf{R}^g)^+$ (cf. [2], chap. I, § 6, prop. 2, corol.). Ainsi, pour tout $y \in \mathbf{R}_1$, on a $\| U'_y \|_1^2 = \varphi_1(U'^*_y U'_y) = \sum_{\iota \in I} (U'^*_y U'_y a_\iota | a_\iota) = \sum_{\iota \in I} \| U'_y a_\iota \|^2$. Donc, l'application $U'_y \to (U'_y a_\iota)_{\iota \in I}$ est une application isométrique de l'espace préhilbertien $\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)$ dans $\mathfrak{H} = \sum_{\iota \in I}^{\oplus} \mathfrak{H}_\mathbf{R}^\iota$, où $\mathfrak{H}_\mathbf{R}^\iota$ est identique à $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ pour $\iota \in I$. Cette application se prolonge en une application isométrique θ de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$ dans $\mathfrak{H}$.

Nous prouvons que l'application $y \to \Phi(U'_y)$ de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$ admet un prolongement linéaire fermé. Soit donc $y_1, y_2, \ldots$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}_1$ telle que $y_n \to 0$, et telle que $\Phi(U'_{y_n})$ ait une limite $u \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$ au sens de la structure hilbertienne de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$. Alors, il faut prouver que $u = 0$.

Soit $\theta(u) = (u_\iota)_{\iota \in I} \in \mathfrak{H}$. L'égalité $\| \theta(\Phi(U'_{y_n}) - u) \|^2 = \sum_{\iota \in I} \| \Phi(U'_{y_n}) a_\iota - u_\iota \|^2$

8) Nous considérons uniquement le cas quand M est induisant à gauche. Dans l'autre cas, quand M est induisant à droite, on peut raisonner de manière analogue.

montre que $\Phi(U'_{y_n})a_\iota$ tend vers u_ι dans $\mathfrak{H}^\iota_{\mathbf{R}}$ pour tout $\iota\in I$. Or, si $x\in\mathbf{R}$,

$$|(\Phi(U'_{y_n})a_\iota|x)|=|(a_\iota|\Phi(U'_{y_n^*})x)|=|(a_\iota|W^{-1}U'_{y_n^*}Wx)|=$$

$$=|(Wa_\iota|V'_{Wx}y_n^*)|\leqq\|a_\iota\|\,\|V'_{Wx}\|\,\|y_n^*\|=\|a_\iota\|\,\|V'_{Wx}\|\,\|y_n\|\to 0,$$

donc $(u_\iota|x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\Phi(U'_{y_n})a_\iota|x)=0$ pour tout $\iota\in I$. Ainsi $\theta(u)=0$, c'est-à-dire $u=0$.

Prouvons maintenant que M admet un prolongement linéaire fermé dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Soit donc $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}$ telle que $x_n\to 0$, et telle que la suite $\{Mx_n\}_{n=1}^\infty$ est convergeante dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Il faut prouver que $\|Mx_n\|\to 0$.

Comme W est unitaire, $\{y_n=Wx_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite d'éléments de $\mathbf{R}_1$ convergeant vers zéro. La relation

$$\|\Phi(U'_{y_m})-\Phi(U'_{y_n})\|_1^2=\varphi_1(\Phi(U'^*_{y_m-y_n}U'_{y_m-y_n}))=$$

$$=\varphi_1(U^*_{W^{-1}y_m-W^{-1}y_n}U_{W^{-1}y_m-W^{-1}y_n})=\varphi_1(U^*_{x_m-x_n}U_{x_m-x_n})=$$

$$=\varphi(\Phi(U^*_{x_m-x_n}U_{x_m-x_n}))=\varphi(U^*_{Mx_m-Mx_n}U_{Mx_m-Mx_n})=\|Mx_m-Mx_n|\,|$$

montre que la suite $\{\Phi(U'_{y_n})\}_{n=1}^\infty$ est fondamentale dans la métrique de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}(\mathbf{R}_1)}$. D'après ce qui précède, $\Phi(U'_{y_n})\to 0$. Ainsi,

$$\|Mx_n\|^2=\varphi(U^*_{Mx_n}U_{Mx_n})=\varphi(\Phi(U^*_{x_n}U_{x_n}))=\varphi_1(U^*_{x_n}U_{x_n})=$$

$$=\varphi_1(\Phi(U'^*_{Wx_n}U'_{Wx_n}))=\varphi_1(\Phi(U'^*_{y_n}U'_{y_n}))=\|\Phi(U'_{y_n})\|_1^2\to 0.$$

En raisonnant de manière analogue, on voit que l'opérateur M^{-1} admet aussi un prolongement linéaire fermé dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. La suffisance de la condition du théorème est une conséquence du lemme de Schur généralisé (cf. [3], p. 258, th. 1) concernant aux représentations des $*$-algèbres. La démonstration directe, dont l'idée est analogue à celle de la démonstration du lemme cité, était donnée pour la convenance du lecteur. Pour le raisonnement utilisé dans la deuxième partie de la démonstration du théorème, cf. [1], lemme 14.

Corollaire 1. *Soit M un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *M est induisant à gauche.*

b) *M est induisant à droite.*

Démonstration. Ceci résulte aussitôt du théorème.

Avant que nous formulions le corollaire 2, nous convenons d'une

Définition. Un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne possédant les propriétés du corollaire 1 est dit *induisant*.

Corollaire 2. *Soit* $\mathbf{R}$ *une algèbre hilbertienne irréductible. Pour qu'un* $*$*-automorphisme* M *de* $\mathbf{R}$ *soit induisant, il faut et il suffit que* M *soit la restriction sur* $\mathbf{R}$ *d'un opérateur de la forme* λU*, où* U *est unitaire dans* $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ *et où* $\lambda>0$.

Démonstration. La condition est suffisante. En effet, soient U un opérateur unitaire dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ et $\lambda>0$ tels que la restriction de λU sur $\mathbf{R}$ est identique à M. Alors, M^{-1} est la restriction de $\lambda^{-1}U^{-1}$ sur $\mathbf{R}$. Ainsi, M satisfait à la condition du théorème, donc, d'après le corollaire 1, M est induisant.

Réciproquement, supposons que M soit induisant. D'après le théorème, ceci veut dire que M et M^{-1} admettent des prolongements linéaires fermés dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Soit $\overline{M}=U(\overline{M}^*\overline{M})^{\frac{1}{2}}=U|\overline{M}|$ la décomposition polaire de $\overline{M}$ ($\overline{M}$ désigne le plus petit prolongement fermé de M dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$). En raisonnant comme dans la démonstration du théorème, on voit que U est unitaire et, pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $U_x|\overline{M}|\subseteqq|\overline{M}|U_x$, $V_x|\overline{M}|\subseteqq|\overline{M}|V_x$. D'après $(\mathbf{R}^g)'=\mathbf{R}^d$ et la théorie spectrale, ces relations impliquent que les projecteurs de la famille spectrale de $|\overline{M}|$ appartiennent à $\mathbf{R}^g\cap\mathbf{R}^d$. En étant $\mathbf{R}$ irréductible, il en résulte que la famille spectrale de $|\overline{M}|$ ne se compose que de O et I, c'est-à-dire que $|\overline{M}|=\lambda I$, $\lambda>0$ (I désigne l'opérateur identique de $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$). Ainsi $\overline{M}=\lambda U$, ce qui établit la démonstration du corollaire 2.

2.

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, dx l'élément de la mesure de Haar, $\mathbf{L}$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G. Pour $f\in\mathbf{L}$, posons $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}$. Muni de l'involution ainsi définie, du produit de composition $f*g(x)=\int f(y)g(y^{-1}x)dy$, et du produit scalaire $(f|g)=$ $=\int f(x)\overline{g(x)}dx$, $\mathbf{L}$ est une algèbre hilbertienne, comme on le voit aisément.

Soit T un homéomorphisme de G sur G. Par $f(x)\rightarrow f_T(x)=f(Tx)$, T définit une application linéaire biunivoque de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{L}$. Supposons que la mesure de Haar sur G soit invariante par T (ainsi par T^{-1} aussi), c'est-à-dire que l'on ait $\int f(Tx)dx=\int f(x)dx$ pour tout $f\in\mathbf{L}$. Nous allons démontrer la

Proposition 1. *Pour que l'application* $f(x)\rightarrow f_T(x)$ *de* $\mathbf{L}$ *sur* $\mathbf{L}$ *soit un* $*$*-automorphisme de l'algèbre hilbertienne* $\mathbf{L}$*, il faut et il suffit que* T *soit un automorphisme de* G.

Démonstration. Supposons que T soit un automorphisme de G. Alors, pour $f \in \mathbf{L}$, on a

$$(f_T(x))^* = (f(Tx))^* = \overline{f((Tx)^{-1})} = \overline{f(Tx^{-1})} = (f^*(x))_T.$$

Pour $f, g \in \mathbf{L}$, on a

$$(f*g)_T(x) = \int f(y)g(y^{-1}Tx)dy = \int f((Tx)y)g(y^{-1})dy =$$
$$= \int f((Tx)(Ty))g((Ty)^{-1})dy = \int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy,$$
$$f_T*g_T(x) = \int f_T(xy)g_T(y^{-1})dy = \int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy,$$

d'où

$$f_T*g_T = (f*g)_T.$$

$f \to f_T$ est donc un $*$-automorphisme de l'algèbre hilbertienne $\mathbf{L}$.

Réciproquement, supposons que $f \to f_T$ soit un $*$-automorphisme de l'algèbre hilbertienne $\mathbf{L}$. Alors, $f \to f_{T^{-1}}$ est aussi un $*$-automorphisme de $\mathbf{L}$. Ainsi, pour tout $f \in \mathbf{L}$, on a

$$\overline{f((T^{-1}x)^{-1})} = (f_{T^{-1}}(x))^* = (f^*(x))_{T^{-1}} = \overline{f(T^{-1}x^{-1})}.$$

Il est connu que les éléments de $\mathbf{L}$ „séparent" les points de G, c'est-à-dire pour $x, y \in G$, $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathbf{L}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Il en résulte que

$$(T^{-1}x)^{-1} = T^{-1}x^{-1} \qquad (x \in G).$$

D'autre part, pour tout $f, g \in \mathbf{L}$, on a

$$\int f((Tx)y)g(y^{-1})dy = (f*g)_T(x) = f_T*g_T(x) = \int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy.$$

Posons $y \to T^{-1}y$. Alors, on a

$$\int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy = \int f(T(xT^{-1}y))g(T(T^{-1}y)^{-1})dy =$$
$$= \int f(T(xT^{-1}y))g(TT^{-1}y^{-1})dy = \int f(T(xT^{-1}y))g(y^{-1})dy.$$

Donc, pour tout $f, g \in \mathbf{L}$, on a

$$\int [f((Tx)y) - f(T(xT^{-1}y))]g(y^{-1})dy = 0.$$

On en conclut que, pour tout $x \in G$,

$$f((Tx)y) - f(T(xT^{-1}y)) = 0 \qquad (y \in G)$$

pour tout $f \in \mathbf{L}$. Comme les éléments de $\mathbf{L}$ séparent les points de G, on a $(Tx)y = T(xT^{-1}y)$ pour tout $x, y \in G$. En posant $y = Tz$, on a

$$(Tx)(Tz) = T(xz),$$

ce qui achéve la démonstration de la proposition 1.

Proposition 2. *Soit T un automorphisme topologique de G par lequel la mesure de Haar sur G est invariante. Alors, l'applications $f \to f_T$ de* $\mathbf{L}$ *sur* $\mathbf{L}$ *est un $*$-automorphisme induisant de* $\mathbf{L}$.

Démonstration. D'après la proposition 1, l'application $f \to f_T$ est un $*$-automorphisme de $\mathbf{L}$ dont l'inverse est identique à l'application $f \to f_{T^{-1}}$. L'invariance de la mesure de Haar par T implique que ces applications sont isométriques. Alors, notre assertion résulte du théorème du paragraphe 1.

Corollaire. *Pour tout élément a fixé de G, l'application $f(x) \to$ $\to f(axa^{-1})$ de* $\mathbf{L}$ *sur* $\mathbf{L}$ *est un $*$-automorphisme induisant de* $\mathbf{L}$.

Démonstration. En tenant compte de la proposition 2, ceci résulte de ce fait que la mesure de Haar est invariante par les automorphismes intérieurs de G.

Bibliographie

[1] J. Dixmier, Algèbres quasi-unitaires, *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 275—322.
[2] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)* (Paris, 1957).
[3] М. А. Наймарк, Нормированные кольца (Москва, 1956).
[4] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

(Reçu le 26 juillet 1960)